



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

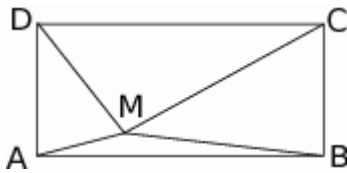
**II edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2014/15

VI etap

1. Wykaż, że równanie $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$. Wykaż (z definicji), że funkcja f w przedziale $(1; +\infty)$ jest malejąca. Wykaż, że funkcja f nie przyjmuje wartości większych od 4.
3. Punkt M leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ (zob. rysunek).

Udowodnij, że $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.



4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p(p^3 + p + 1)$ jest parzysta.
5. Rozważmy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki należą do paraboli o równaniu $y = 0,5x^2 - 2$, a dwa pozostałe należą do odcinka AB , gdzie $A(4,6)$ i $B(-4,6)$. Wyznacz wymiary tego prostokąta, którego pole jest największe. Oblicz to pole.