



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

IV edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2016/17

II etap

Zad.1.

Rozwiązać równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$ w zbiorze liczb naturalnych.

Zad.2.

Dany jest czworokąt, w którym dwa przeciwległe kąty mają po 90° , boki przyległe jednemu kątowi prostemu mają długości a i b , dwa pozostałe są równych długości. Obliczyć długość przekątnej łączącej wierzchołki kątów prostych.

Zad.3.

Wyznaczyć : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

Zad.4.

Do jednego ze sklepów znanej sieci samoobsługowych marketów SEVEN- ELEVEN wszedł klient i po wrzuceniu do koszyka czterech produktów udał się do kasjera. Ten postukał w klawisze i orzekł: „Płaci pan 7, 11” Klient nie posiadał się z oburzenia: - „To dlatego mam tyle płacić za te głupstwa, że się tak nazywa?” „Ależ skąd” - odparł kasjer - „po prostu pomnożyłem ceny produktów, które ma pan w koszyku i tyle wyszło”. Klient aż załamał ręce z rozpacz i litości nad głupotą kasjera: - „Panie, przecież ceny się dodaje a nie mnoży! – Może ma pan rację” - zgodził się kasjer, postukał trochę w klawisze i powiedział: - „I po co było się klócić? Tak jak mówiłem, płaci pan 7, 11” I jakie to były ceny ?

Zad. 5

Wykazać, że w dowolnym trójkącie zachodzi równość : $\frac{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$

gdzie a, b i c są długościami boków trójkąta, a s_a, s_b, s_c są długościami jego środkowych.