



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

V edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2017/18

III etap

1. Udowodnić, że istnieje liczba postaci $111\dots11$ (złożona z samych jedynek) podzielna przez 2017

2. Dwaj znajomi umówili się na spotkanie, przyjmując następujące warunki:

- 1) W ustalone miejsce spotkania przychodzą oni niezależnie jeden od drugiego w dowolnym czasie pomiędzy godziną 13.00 a 14.00.
- 2) Po przyjściu każdy z nich oczekuje na drugiego nie dłużej niż pół godziny oraz opuszcza miejsce spotkania nie później niż o godzinie 14.00.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że znajomi ci spotkają się?

3. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a + b + c < 12$, to co najmniej jedno z równań:

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych.

4. Rozwiąż równanie:

$$|||x^2 - x| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| = x^2 - 2x - 14$$

(po lewej stronie występuje 11 jedynek)

5. Tw. (Cevy) Punkt O należy do wnętrza trójkąta ABC . Proste AO, BO, CO przecinają boki BC, CA i AB odpowiednio w punktach K, L, M . Wykazać, że

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1$$