



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**V edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

*rok szkolny 2017/18*

**II etap**

- 1.** Znaleźć wszystkie liczby pierwsze  $p$  i  $q$  i wszystkie liczby naturalne  $n$ , które spełniają równanie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$ .
- 2.** Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej  $n > 1$  liczba  $n^n - n^2 + n - 1$  dzieli się przez  $(n - 1)^2$ .
- 3.** Na każdym polu szachownicy  $2012 \times 2012$  mieszka krasnoludek, przy czym żaden z krasnoludków nigdy nie opuszcza pola na którym mieszka. Okazało się, że 2016 krasnoludków cierpi na nieuleczalną, zaraźliwą chorobę – matemafilię, w tym 16 krasnoludków mieszkających na kwadracie  $4 \times 4$  na samym środku szachownicy. Zdrowy krasnoludek zarazi się matemafilią, jeśli co najmniej dwóch jego sąsiadów jest na nią chorych (sąsiadami są krasnoludki, które zajmują pola o wspólnym boku). Czy jest możliwe, że po pewnym czasie wszystkie krasnoludki będą chore?
- 4.** Wyznacz na płaszczyźnie zbiór  $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |y| + \frac{1}{2} \leq \sqrt{1 - |x|}\}$ .
- 5.** W równoległoboku ABCD dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A przecina bok CD w punkcie P, a prostą BC w punkcie Q. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ. Wykaż, że na czworokącie BCSD można opisać okrąg.

Termin oddania 8.12.2017r.