



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**VII edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2019/20

**IV etap**

**1.** Udowodnij, że jeżeli  $xyz = 1$ ,  $a = x + \frac{1}{x}$ ,  $b = y + \frac{1}{y}$ ,  $c = z + \frac{1}{z}$  oraz  $abc$  jest liczbą całkowitą, to  $a^2 + b^2 + c^2$  jest liczbą całkowitą.

**2.** Wykaż, że  $\log_4 5 + \log_5 4 > \log_5 6 + \log_6 5$ .

**3.** Dana jest liczba sześciocyfrowa  $BLABLA$ . Samogłoska oznacza cyfrę parzystą a spółgłoska nieparzystą. Uzasadnij, że liczba ta jest podzielna przez 286.

**4.** Dany jest trójkąt  $ABC$ . Niech punkty  $D$ ,  $E$ ,  $F$  są środkami odpowiednio boków  $AB$ ,  $CB$  i  $AC$ . Wykaż, że  $|AE|^2 + |BF|^2 > \frac{9}{8} |AB|^2$ .

**5.** Znajdź wszystkie funkcje  $f : R - \{0,1\} \rightarrow R$  spełniające równanie:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1-x) = x + \frac{1}{x} + 1 \quad \text{dla } x \in R - \{0,1\}.$$

Termin oddania 24.01.2020