



UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**XI edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2023/24

VI etap

1. Wyznacz wartość parametru m , dla której wielomian $W(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 15x + m$ ma pierwiastek dwukrotny.
2. Okręgi o środku S i promieniu s oraz o środku P i promieniu p są styczne zewnętrznie i styczne do prostej m . W obszar ograniczony tymi okręgami oraz prostą m wpisano koło styczne do okręgów i prostej m . Oblicz długość promienia tego koła.
3. Rozważmy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki należą do paraboli o równaniu $y = 0,5x^2 - 2$, a dwa pozostałe należą do odcinka AB , gdzie $A(4,6)$ i $B(-4,6)$. Wyznacz wymiary tego prostokąta, którego pole jest największe. Oblicz to pole.
4. Wykaż, że jeśli $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, to $\frac{x^6 + 128}{2x^2} \geq 24$
5. Dana jest kula o promieniu R . W koło wielkie tej kuli wpisano kwadrat. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu S leżącego na powierzchni kuli od wierzchołków kwadratu jest równa $8R^2$.