



UNIWERSYTET  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**XII edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2024/25

**I etap**

1. Udowodnij, że jeżeli  $a, b, c > 0$ , to  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

2. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania

$$(x^2 - 2022x - 2 \cdot 2024)^2 + (x^2 - 2020x - 4 \cdot 2024)^2 + (x^2 - 2018x - 6 \cdot 2024)^2 = 0$$

3. W trójkącie prostokątnym równoramiennym  $ABC$ , dwusieczne  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$

przecinają się w punkcie  $I$ . Wyznacz wartość sumy:  $\frac{AI}{IA'} + \frac{BI}{IB'} + \frac{CI}{CI'}$

4. Liczba  $m$  jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wykaż, że liczba  $13m$  też ma tę własność.

5. Przez wierzchołek  $A$  kwadratu  $ABCD$  poprowadzono prostą przecinającą przedłużenia boków  $BC$  i  $CD$  w punktach  $M$  i  $N$ . Wykaż, że

$$\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2} = \frac{1}{|AB|^2}$$

Termin oddania 04.11.2024