



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**XII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2024/25

IV etap

1. Wykaż, że $21 \mid 2^{4^n} + 5$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| = 4 \\ |x - 1| + |y| = m \end{cases}$$
 w zależności od parametru m .
3. Na bokach AB i AC trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty L i M , że $5|AL| = 2|AB|$ i $4|AM| = 3|AC|$. Odcinki BM i CL przecinają się w punkcie P , a odcinki AP i BC w punkcie N . Wyznacz $\frac{|BN|}{|BC|}$.
4. Udowodnij, że jeżeli wielomian $P(x) = ax^3 - ax^2 + 9bx - b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ ma trzy pierwiastki dodatnie, to są one równe.
5. Wyznacz równanie, które opisuje zbiór środków wszystkich okręgów zewnętrznie stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 9$ i jednocześnie stycznych do prostej o równaniu $y - 3 = 0$.