



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**XIII edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2025/26

IV etap

1. Wykaż, że jeżeli k jest liczbą względnie pierwszą z liczbą 6, to $24 \mid k^2 - 1$.
2. Wykres funkcji f określonej wzorem $g(x) = m(x+n)$, gdzie $m, n \in \mathbb{R}$ i $m \neq 0$ przechodzi przez punkt $K(m, mn+n^2)$ ale nie przechodzi przez punkt $L(m+n, 3n^2)$.
Wyznacz $\frac{n}{m}$.
3. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a i b zachodzi nierówność $\frac{a^6 + b^6}{2} \geq 3a^2b^2 - 4$.
4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory F i G , jeśli:
 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y+1)^2 \leq 25\}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x+3| - 1\}$.
Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu wpisanego w wycinek koła będącego częścią wspólną zbiorów F i G .
5. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest równy α , a długość boku BC jest równa a . Wiedząc, że $|AC|^2 - |AB|^2 = m^2$, oblicz $\sin(\angle B - \angle C)$.